Devoir à la maison N°2

Classes $4^{ème}sc_2$

Exercice N°1:

Soit f la fonction définie sur □ par $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$

1/a) Montrer que f est dérivable sur □ et que $f'(x)=\dfrac{4e^x}{(e^x+1)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

2/a) Etudier les variations de la fonction $g(x)=f(x)-x$.

b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution a sur □ et que $a\in\left]2;3\right[$

3/a) Montrer que $\forall x\in\left]2;3\right[$ on a : $\left|f'(x)\right|\le 0,5$

b) En déduire que $\forall\ x\in\left[2;3\right]$ on a : $\left|f(x)-a\right|\le 0,5.\left|x-a\right|$

4/ Soit V la suite définie sur □ par : $\begin{cases} V_0=3 \\ V_{n+1}=f(V_n) \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que $\forall n\in$ □ : $2\le V_n\le 3$

b) Montrer que : $\left|V_{n+1}-a\right|\le 0,5.\left|V_n-a\right|$

c) Déduire que $\forall n\in$ □ : $\left|V_n-a\right|\le(0,5)^n$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n$

EXERCICE N°2 :

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère les points A(3,2,6) , B(1,2,4) et C(4,-2,5).

1) a. Déterminer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

   b. En déduire que A, B et C définissent un plan P.

   c. Vérifier q'une équation de ce plan est 2x + y – 2z + 4 = 0.

2) a. Montrer que le triangle ABC est rectangle

   b. Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par O et perpendiculaire à P.

   c. Soit K le projeté orthogonal de O sur P. Calculer la distance OK.

   d. Calculer le volume du tétraèdre OABC.

3) Soit I le point de l'espace définie par $3\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ et G le centre de gravité de ABC.

   a. Montrer que I est le milieu du segment [OG] .

   b. Vérifier que d(I,P) $=\dfrac{2}{3}$.

4) Soit S l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5$.

   a. Montrer que S est une sphère;

   b. Etudier la position de S et du plan P .

EXERCICE N°3 :

On considère la suite réelle (U_n) définie sur IN par :

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = 1 + \sqrt{U_n - 1} \qquad \text{pour tout n de IN.} \end{cases}$$

1/a) Montrer par récurrence que pour tout n de IN, $1 < U_n < 2$.

b) Montrer que (U_n) est croissante.

c) En déduire que (U_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

2/ Soit (V_n) la suite réelle définie sur IN par : $V_n = \ln (U_n - 1)$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$ et retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

EXERCICE N°4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \ln(1 + e^{-x})$

I-1/a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Interpréter géométriquement le résultat.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

2/a) Montrer que $\forall\ x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = x + 1 - \ln(1 + e^{x})$

b) En déduire que la droite D : y = x + 1 est une A.O à ζ_f au $V(-\infty)$

c) Déterminer la position de ζ_f par rapport à D

3/a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \dfrac{1}{1 + e^{x}}$

b) Etudier les variations de la fonction f

c) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique $x_0 = -\ln(e - 1)$

4/ Tracer la courbe de ζ_f et ses asymptotes

5/a) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\infty, 1[$

b) Tracer $\zeta_{f^{-1}}$ courbe représentative de f^{-1} , fonction réciproque de f

c) Explicité $f^{-1}(x)$ pour $x \in]-\infty, 1[$